MACIERZE LOSOWE
LISTA 10
Twierdzenie Voiculescu

1. Niech $(X_n)_{n\geq 1}$ oraz $(Y_n)_{n\geq 1}$ będą ciągami niezależnych względem siebie dla każdego n macierzy Wignera zbudowanymi ze zmiennych losowych o wariancji 1. Wyznaczyć graniczne momenty mieszane postaci

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(X_n Y_n^4 X_n)\right), \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(X_n^4 Y_n^2)\right), \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}((X_n Y_n)^3)\right),$$

stosując dowód twierdzenia Voiculescu, tzn. korzystając z reprezentacji momentów granicznych na wolnej przestrzeni Focka w postaci momentów operatorów semicyrkularnych $\omega_i = \ell_i + \ell_i^*$, tzn.

$$\varphi(\omega_{i_1}\dots\omega_{i_6})$$

dla odpowiednich $i_1,\dots,i_6$. Zdefiniować odpowiadające tym momentom adaptowane dwupartycje nieprzecinające się.

2. Dla wszystkich dwupartycji $\pi \in \mathcal{NC}_6^2$ wyznaczyć ich dopełnienia Krewerasa $K(\pi)$ oraz odwrotne dopełnienia Krewerasa $K^{-1}(\pi)$.

3. Dla dwupartycji $\pi = \{\{1,8\},\{2,7\},\{3,4\},\{5,6\}\} \in \mathcal{NC}_8^2$ wyznaczyć jej dopełnienie Krewerasa $K(\pi)$ oraz $K^{-1}(\pi)$ i sprawdzić, że $K^{-1}(K(\pi)) = K(K^{-1}(\pi)) = \pi$.

4. Niech będzie dana *-NPP $(B(\mathcal{F}),\varphi)$, gdzie $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{H})$ jest wolną przestrzenią Focka nad $\mathcal{H} = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$. Dla wszystkich partycji $\pi \in \mathcal{NC}_4$ wyznaczyć odpowiadające im nietrywialne (niezerujace się) produktowe funkcje momentowe postaci

$$\varphi_\pi(b_1,b_2,b_3,b_4) = \prod_{V\in\pi}\varphi(b_V)$$

gdzie $b_V = \prod_{j\in V} b_j$ (produkt jest wzięty w kolejności rosnących indeksów) oraz

   (a) $b_1,b_2,b_3,b_4 \in \{\omega_1,\omega_2\}$,
   (b) $b_1,b_2,b_3,b_4 \in \{c,c^*\}$, gdzie $c = \ell_1 + \ell_2^*$ (jest to tzw. *operator cyrkularny*), a $c^* = \ell_1^* + \ell_2$ jego jego sprzężeniem hermitowskim,
   (c) $b_1,b_2,b_3,b_4 \in \{\gamma\}$, gdzie γ jest operatorem o rozkładzie Marchenko-Pastura o parametrze t.

5. Obliczyć momenty postaci $\varphi((cc^*)^m)$ oraz $\varphi((c^*c)^m)$ dla $m \in \mathbb{N}$, przy oznaczeniach z poprzedniego zadania.

6. Wyznaczyć momenty naprzemienne postaci $\varphi((\omega_1\gamma)^4)$ oraz $\varphi((\gamma\omega_1)^4)$, gdzie γ jest operatorem o rozkładzie Marchenko-Pastura, takim, że ω_1 oraz γ są wolne względem φ, korzystając z wyników zadania poprzedniego.

7. Niech $(D_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem zespolonych deterministycznych macierzy diagonalnych, takich, że istnieje granica skończona

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(D_n^k) = \beta_k$$

dla każdego k. Niech (X_n) będzie ciągiem macierzy Wignera (przyjąć wariancję zmiennych równą jeden). Wyznaczyć graniczne momenty postaci

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}((D_nX_n)^4)\right) \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}((D_nX_n)^6)\right)$$

Są to momenty, które pojawiają się w uogólnionym twierdzeniu Voiculescu, mówiącym o tym, że niezależne macierze Wignera są asymptotycznie wolne względem macierzy deterministycznych posiadających rozkłady graniczne.

Romuald Lenczewski